# （浙江文亮）专升本数学公式知识点及注意事项

**世上没有白费的努力，也没有碰巧的成功，一切的无心插柳，其实都是水到渠成**
**人生没有白走的路，也没有白吃的苦，你跨出去的每一步，都是未来的基石与铺垫。**
**我们能改变的不多，但要去做，星光不负赶路人。**
**You are more than what you have become now! Remember who you are!**

## 一、函数极限及连续

1.常用的等价无穷小，严格保证$(x\to 0)$

$a^x-1\sim x\ln a$　　$\sin x\sim \arcsin x\sim x$　　$\tan x\sim \arctan x\sim x$　　$e^x-1\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$　　$\log_a^{(1+x)}\sim \dfrac{x}{\ln a}$　　$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$　　$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$

$\tan x-\sin x\sim \dfrac{1}{2}x^3$　　$x-\sin x\sim \dfrac{1}{6}x^3$　　$x-\tan x\sim -\dfrac{1}{3}x^3$　　$x-\ln(1+x)\sim \dfrac{1}{2}x^2$

$x-\arctan x\sim \dfrac{1}{3}x^3$　　$x-\arcsin x\sim -\dfrac{1}{6}x^3$　　$e^x-1-x\sim \dfrac{1}{2}x^2$　　$1-\cos^a x\sim \dfrac{a}{2}x^2$

- 广义化 e.g.：

$狗-\sin 狗\sim \dfrac{1}{6}狗^3(狗\to 0)$

① 必须保证 3 个狗一模一样
② 狗必须严格保证趋近于 0
③ 注意整体性，注意非 0 因子

- 特殊的等价：

$e^{f(x)}-e^{g(x)}\sim f(x)-g(x)\left[f(x)\to 0,g(x)\to 0\right]$

$e.g.:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$

2.第二重要极限：

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

- $1^\infty:\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$
- $0^0$或$\infty^0:u^v=e^{v\ln u}$

3.其他常见极限

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0\ (k>0)$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}(a,b,c>0)$

4. 常用无穷大的比较：

$x \to +\infty \Rightarrow \ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x} (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$

$n \to \infty \Rightarrow \ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n} (\alpha > 0, \beta > 0, a > 1)$

无穷大量一定是无界变量，无界变量不一定是无穷大量

5 常用左右有别的极限

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to0^{+}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{arccot}\, x = 0$ | $\lim\limits_{x\to0^{+}} \frac{\sin x}{\lvert x\rvert} = +1$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to0^{-}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arccot}\, x = \pi$ | $\lim\limits_{x\to0^{-}} \frac{\sin x}{\lvert x\rvert} = -1$ |

6 函数性质：

① 导函数与原函数的奇偶性、周期性

| | | |
|---|---|---|
| 若函数 $f(x)$ 是可导的 | 奇函数 | 则 $f'(x)$ 是偶函数 |
| | 偶函数 | 则 $f'(x)$ 是奇函数 |
| | 周期为 $T$ 的周期函数 | 则 $f'(x)$ 也是以 $T$ 为周期的周期函数 |
| 若连续函数 $f(x)$ 是 | 奇函数 | 则一切原函数是偶函数 |
| | 偶函数 | 则只有一个原函数是奇函数 |
| | 以 $T$ 为周期且 $\int_{0}^{T} f(x)dx = 0$ | 则 $f(x)$ 的一切原函数以 $T$ 为周期 |

② 若 $f(x)$ 在有限区间 $(a,b)$ 内可导且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有界。（变化率有界，函数有界）

③ 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称，当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时，则必有 $f(0)=0$

④ 偶函数 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，且当 $f'(0)$ 存在时，则必有 $f'(0)=0$

⑤ 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l,l]$ 上的任意函数，则

$F_{1}(x) = f(x) + f(-x)$ 必为偶函数。$y = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ 双曲余弦（chx）

$F_{2}(x) = f(x) - f(-x)$ 必为奇函数。$y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 双曲正弦（shx）

7.间断点：

① 连续：极限值等于函数值（**区别于极限存在**）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f\left(x_0\right)$

**极限存在**：左右极限存在且相等（<u>和函数值无关</u>）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

② 可去间断点：极限值存在不等于函数值（函数值可以不存在）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f\left(x_0\right)$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq f\left(x_0\right)$

③ 跳跃间断点：左右极限存在且不相等

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B, A\neq B$

④ 无穷间断点（双侧趋向于无穷，或者至少一个趋近于无穷即可）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

⑤ 震荡间断点（极限值为震荡不存在）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$震荡不存在 e.g.：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=$ 震荡不存在

**找间断点**：1 分段函数分段点——可能间断

2 函数本身的无定义点——一定间断

## 二、一元函数微分学

1.导数定义：（注意一动减去一静原则）

| | |
|---|---|
| $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ | $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ |
| $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{狗\to x_0}\dfrac{f\left(狗\right)-f\left(x_0\right)}{狗-x_0}$ **（广义化）**<br>1：必须保证 3 个狗一模一样<br>2：狗必须趋近于 $x_0$ | $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{狗\to 0}\dfrac{f\left(x_0+狗\right)-f\left(x_0\right)}{狗}$ **（广义化）**<br>1：必须保证 3 个狗一模一样<br>2：狗必须趋近于 0 |

重要结论：若函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$（存在）则 $\Rightarrow\begin{cases}f(x_0)=0\\f'(x_0)=A\end{cases}$

2.导数基本公式

$(C)'=0$ $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(\cos x)'=-\sin x$

$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\tan x)'=\sec^2 x$

$\left(e^x\right)'=e^x$ $(\sin x)'=\cos x$ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

导数的运算：

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

3.导数的几何意义

- 切线方程：$y - y_0 = f'(x_o)(x - x_0)$；法线方程：$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_o)}(x - x_0)$
- 平面中两条相互垂直直线斜率的关系：$k_1k_2 = -1$
- 两点之间的斜率：$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

4.高阶导数

$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n e^{ax+b}$

$\left(x^n\right)^{(n)} = n!$　　$\left(x^n\right)^{(n+1)} = 0$

$(\sin ax)^{(n)} = \sin(ax + n \cdot \dfrac{\pi}{2})a^n$

$(\cos ax)^{(n)} = \cos(ax + n \cdot \dfrac{\pi}{2})a^n$

$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

$(\ln(ax+b))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot a^n}{(ax+b)^n}$

莱布尼兹公式：

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$；　$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$　　$0! = 1$　　$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \cdot n$

5.一元函数微分学几何应用：

① 注意事项：

（1）极值点间断点讨论的前提是双侧有定义，区间端点不讨论极值。

（2）极值是小范围的概念，极值不一定是最值，最值不一定是极值。

（3）极大值，极小值之间没有任何必然的大小关系。

（4）区间内部的最值一定是极值。

（5）极值点不一定是驻点，驻点不一定是极值点。

（6）先写定义域（注意写成区间）。

② 单调性：利用导数工具研究（区间上一个点的导数值正负并不代表在其去心邻域内单调）

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 I 上严格单调递增。

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 I 上严格单调递减。

③ 极值的判别：

（1）一阶可导点是极值的必要条件（很重要）

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且在点 $x_0$ 处取得极值，则必然有 $f'(x_0)=0$

（2）极值的第一充分条件：设函数在 $x=x_0$ 处连续，且在 $x_0$ 的某去心邻域 $\overset{o}{U}\left(x_0,\delta\right)$ 内可导

- 若 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 时，$f'(x)>0$ 则函数在 $x=x_0$ 处取得极小值。
- 若 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 时，$f'(x)<0$ 则函数在 $x=x_0$ 处取得极大值。
- 若 $f'(x)$ 在 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$ 和 $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 内不变号，则点 $x_0$ 不是极值点。

（3）极值的第二充分条件：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$

- 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极大值。
- 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值。

④ 凹凸性的判别：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导

- 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是凹的。
- 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 I 上的图形是凸的。

- 二阶可导点是拐点的必要条件：若 $f''(x_0)$ 存在，且点 $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$ 为曲线上的拐点，则必然有 $f''(x_0)=0$
- 拐点定义：（只需要连续不必可导）连续曲线凹弧和凸弧的分界点称为曲线的拐点（先凸后凹或先凹后凸）
- 写作 $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$

⑤ 渐近线：同一方向不能同时存在水平渐近线和斜渐近线

step 1. 找无定义点、$x_0$. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\ x\to x_0^-\\ x\to x_0}} f(x)$ 是否为 $\infty$. 若是 $\infty$. 则 $x=x_0$ 为铅垂(垂直)

step 2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty\\ x\to\infty}} f(x)$ 是否存在为A，若为A，则 $y=A$ 为水平渐近线

step 3. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty\\ x\to\infty}} f(x)=\infty$. 则：$1^\circ$. $k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty\\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{x}$ 是否为非零常数，

$2^\circ$ 若是，则 $b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty\\ x\to\infty}}[f(x)-kx]$ 是否存在，若是. 则 $y=kx+b$ 为斜渐近线

若 $k=0$. 则无斜渐近线；若 $k=0$, 且 $b$ 存在. 则 $y=b$ 为水平

## 三、一元函数积分学

1.积分基本公式

$$\int k\ \mathrm{dx}=kx+C$$

$$\int x^{a}\mathrm{dx}=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C\ \ (a\neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx}=\ln|x|+C$$

$$\int e^{x}\mathrm{dx}=e^{x}+C$$

$$\int a^{x}\mathrm{dx}=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$$

$$\int \cos x\ \mathrm{dx}=\sin x+C$$

$$\int \sin x\ \mathrm{dx}=-\cos x+C$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2}x}\ \mathrm{dx}=\int \sec^{2}x\ \mathrm{dx}=\tan x+C$$

$$\int \frac{1}{\sin^{2}x}\ \mathrm{dx}=\int \csc^{2}x\ \mathrm{dx}=-\cot x+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}}\ \mathrm{dx}=\arctan x+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\ \mathrm{dx}=\arcsin x+C$$

$$\int \sin^{2}x\ \mathrm{dx}=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$$

$$\int \cos^{2}x\ \mathrm{dx}=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

$$\int \cot^{2}x\ \mathrm{dx}=-\cot x-x+c$$

$$\int \sec x\tan x\ \mathrm{dx}=\sec x+C$$

$$\int \csc x\cot x\ \mathrm{dx}=-\csc x+C$$

$$\int \sec x\ \mathrm{dx}=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$\int \csc x\ \mathrm{dx}=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int \tan x\ \mathrm{dx}=-\ln|\cos x|+C$$

$$\int \cot x\ \mathrm{dx}=\ln|\sin x|+C$$

$$\int \frac{1}{a^{2}+x^{2}}\ \mathrm{dx}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{x^{2}-a^{2}}\ \mathrm{dx}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

$$\int \frac{1}{a^{2}-x^{2}}\ \mathrm{dx}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\ \mathrm{dx}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}\ \mathrm{dx}=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}\right)+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}\ \mathrm{dx}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}\right|+C$$

$$\int \tan^{2}x\ \mathrm{dx}=\tan x-x+c$$

其他常用积分：$\int -\frac{1}{x^{2}}\ \mathrm{dx}=\frac{1}{x}+C$　　$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \mathrm{dx}=\sqrt{x}+C$

2. $F(x)$为$f(x)$的一个原函数 $\Rightarrow F'(x)=f(x)$

3.求导、微分与积分的关系：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\int f'(x)\ \mathrm{dx}=f(x)+C$<br>先求导后积分 | $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$<br>先微分后积分 | $\left(\int f(x)\ \mathrm{dx}\right)'=f(x)$<br>先积分后求导 | $\mathrm{d}\left(\int f(x)\ \mathrm{dx}\right)=f(x)\ \mathrm{dx}$<br>先积分后微分 |

4.变限积分求导公式：（上限代入乘上限导数-下限代入乘下限导数）

$$\left[\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)\ \mathrm{dt}\right]'=f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)-f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

5.积分技巧、公式、性质

| | |
|---|---|
| $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ \mathrm{dx}=$<br>（点火公式） | $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$，$n$为大于1奇数<br>$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，$n$为正偶数 |
| $\int_0^{\pi}\sin^n x\ \mathrm{dx}=$ | $2.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$，$n$为大于1奇数<br>$2.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，$n$为正偶数 |
| $\int_0^{\pi}\cos^n x\ \mathrm{dx}=$ | 0，$n$为正奇数<br>$2.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，$n$为正偶数 |
| 区间再现公式：<br>$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$<br>区间再现换元法：（令 x=上限加下限-t） | $\int_o^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_o^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ |
| $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ 区间再现经典推论 | $\int_o^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_o^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$<br>画图象可知 |
| 对称区间奇偶性：<br>（见到对称区间先看奇偶性） | $f(x)$奇函数:$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$<br>$f(x)$偶函数:$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$<br>$f(x)$任意函数:$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$ |
| 定积分的精确定义：<br>（看准题目是求极限还是表示成定积分） | $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$ |
| 三角换元：<br>（定积分换元注意上下限） | $\sqrt{a^2-x^2}\to$令$x=a\sin x$<br>$\sqrt{a^2+x^2}\to$令$x=a\tan x$<br>$\sqrt{x^2-a^2}\to$令$x=a\sec t$ |

| | |
|---|---|
| 分部积分公式：反对幂指三（三指） | $\int udv=uv-\int vdu$<br>$\int_a^b udv=uv\Big\|_a^b-\int_a^b vdu$ |
| 周期性公式：<br>（若 f（x）为周期为 T 的连续函数）<br>注意三角函数加绝对值后周期变化 | $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx(a取-\frac{T}{2}特例)$<br>$\int_a^{a+nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx(n\in N)$ |

- 定积分常用性质：

$1:\int_a^a f(x)dx=0$

$2:\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$3:\int_a^b K_1 f(x)dx\pm\int_a^b K_2 g(x)dx=K_1\int_a^b f(x)dx\pm K_2\int_a^b g(x)dx$

4：积分的可拆性（保证首尾顺次连接无论a, b, c大小如何）

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

5：若在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0\Rightarrow$则$\int_a^b f(x)dx\geq 0$（相等则恒等于0）

6：若在区间$[a,b]$上$f(x)$非负只要$f(x)$不恒等0 $\Rightarrow$则$\int_a^b f(x)dx>0$

7：若在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)\Rightarrow$则$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

8：估值定理：设，$m,M$在区间$[a,b]$上$f(x)$的最小最大值

$\Rightarrow$则$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)(a<b)$

$9:\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx(a<b)$

- 定积分存在性质：

1：若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$\int_a^b f(x)dx$存在

2：若$f(x)$在$[a,b]$上单调，则$\int_a^b f(x)dx$存在

3：若$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点（不可以有无穷间断点）则$\int_a^b f(x)dx$ 存在

4：可积函数必然有界：（必要条件）即若定积分$\int_a^b f(x)dx$存在,则$f(x)$在$[a,b]$上必然有界

- 原函数（不定积分）存在定理：（文亮内部资料请勿外传）

1.连续函数$f(x)$必然有原函数$F(x)$

2.含有第一类间断点，无穷间断点的函数$f(x)$在包含该间断点的区间内必没有原函数$F(x)$

6.反常积分 p-积分常用结论：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a>0)\ \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{dx}=$ | $p>1$，收敛<br>$p\le 1$，发散 | $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{dx}=$ | $p<1$，收敛<br>$p\ge 1$，发散 |
| 广义 p 积分：<br>$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{dx}=$ | $p>1$，收敛<br>$p\le 1$，发散 | $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}\,\mathrm{dx}=$ | $p<1$，收敛<br>$p\ge 1$，发散 |

7 圆的应用：（定积分的几何意义）(a>0)

| | | |
|---|---|---|
| $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$ | $\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$ | $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{2}a^2$ |

8.定积分应用（文亮专升本）

面积公式：（注意面积体积具有实际的物理意义一定是正的）

$S=\int_a^b\left[f_{上}(x)-f_{下}(x)\right]\mathrm{dx}$；$S=\int_c^d\left[g_{右}(y)-g_{左}(y)\right]\mathrm{dy}$

绕 $x/y$ 轴旋转体积公式：

$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)\,\mathrm{dx}$；$V_y=\int_c^d\pi g^2(y)\,\mathrm{dy}$；

柱壳（$qiao$）法：$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{dx}$（注意f(x)正负）

变速路程：$S=\int_a^b V(t)\,\mathrm{dt}$

变力做功：$W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{dx}$

9.三角有理式积分的万能代换公式：（不到万不得已不要用）

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$，$\mathrm{dx}=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{dt}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$。

## *初等数学基础（详细见课本）

1.常用三角函数公式

$\sin x$与$\cos x$与1之间的关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\sec x$与$\tan x$与1之间的关系式：$\sec^2 x-\tan^2 x=1$

$\csc x$与$\cot x$与1之间的关系式：$\csc^2 x-\cot^2 x=1$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

奇变偶不变，符号看象限：

$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$；$\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$；$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$；$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

辅助角公式（常用于三角积分）：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)(\tan\varphi=\frac{b}{a})$

2.指数与对数运算

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　$(a^m)^n=a^{mn}$　　$(ab)^n=a^n\cdot b^n$　　$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$　　$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$　　$e^{a\ln N}=N^a$　　$\log_a 1=0$ ；$\log_a a=1$

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N;$　　$\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N;$　　$\log_a M^n=n\log_a M;$　　（换底）$\log_N M=\frac{\log_a M}{\log_a N}$

3.等差数列求和：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ ；等比数列求和：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

4.乘法公式

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　　**二项式定理:**$(a+b)^{\mathrm{n}}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

5.三角不等式：$\left||a|-|b|\right|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

6.基本不等式 $2ab\le a^2+b^2$

7.平均值不等式：$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$

8.其他常用不等式

$\sin x<x<\tan x(0<x<\frac{\pi}{2})$　　$\sin x<x(0<x)$　　$e^x>x+1(\forall x)$

$x>\ln(1+x)(0<x)$　　$x\text{-}1>\ln(x)(0<x)$　　$\frac{1}{1+\mathrm{x}}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}(x>0)$

## 四、无穷级数

1.级数收敛的必要条件：

（1）如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

（2）若$\lim_{n\to\infty}u_n\ne 0$则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必然发散

（3）若$\lim_{n\to\infty}u_n$=0，不能保证$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛

2.级数的重要结论

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\Rightarrow \begin{cases} u_n \geq 0, v_n \geq 0 \text{时:} \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) \text{发散} \\ v_n\text{，}u_n\text{任意时:} \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) \text{不定} \end{cases}$

3.绝对收敛与条件收敛

- 定义

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛

(3) 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛则级数$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

- 性质

绝对收敛$\pm$绝对收敛=绝对收敛

条件收敛$\pm$绝对收敛=条件收敛

条件收敛$\pm$条件收敛=绝对收敛或条件收敛

4.常用级数敛散性

| | | | |
|---|---|---|---|
| p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ | $p>1$，收敛 | 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ | $\lvert q\rvert<1$ 收敛　收敛的等比级数求和公式:$\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$ |
| | $p \leq 1$，发散 | | $\lvert q\rvert \geq 1$ 发散 |
| 交错 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ | $p>1$，绝对收敛<br>$0<p\leq 1$，条件收敛<br>$p \leq 0$，发散 | 广义 p 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ | $p \leq 1$，发散 |
| | | | $p>1$，收敛 |

5.比较判别法的极限形式（正项级数、两个级数，多与 p 级数进行比较）

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=$ | $k$ ，$u_n$与$v_n$同敛散<br>$0$ ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛<br>$+\infty$ ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散 |

6.比值判别法(达朗贝尔)（与自身比、$n!$ $n^n$ $a^n$）

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p$ | $p>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散<br>$p<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛<br>$p=1$，此判别法失效 |

7.根式判别法（柯西）：$n^n$ $a^n$

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ | $p>1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散<br>$p<1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛<br>$p=1$此判别法失效 |

8.求幂级数收敛区间的公式：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1\Rightarrow x\in(a,b)$$

求收敛域需要单独讨论 x=a 以及 x=b 的敛散性 0

9.求和函数

| | |
|---|---|
| 幂级数求和函数突破口： | 先导后积公式：（极其重要） |
| 多项式$(an+b)^c$在分子先积后导 | $s(x)=\int_a^x s'(t)dt+s(a)$ |
| 多项式$(an+b)^c$在分子先导后积 | $a$取级数中心点$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n(\text{中心点}x_0)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(\text{中心点}0)\end{cases}$ |

10.常用麦克劳林展开式（相当于在 x=0 展开）

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,x\in(-1,1]$$

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};x\in[-1,1)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

11.补充

有如下几个结论请大家记住.

**结论 1** 根据阿贝尔定理,已知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在某点 $x_1(x_1\neq x_0)$ 的敛散性,确定该幂级数的收敛半径可分为以下三种情况.

(1)若在 $x_1$ 处收敛,则收敛半径 $R\geqslant|x_1-x_0|$.

(2)若在 $x_1$ 处发散,则收敛半径 $R\leqslant|x_1-x_0|$.

(3)若在 $x_1$ 处条件收敛,则 $R=|x_1-x_0|$.【重要考点】

**结论 2** 已知 $\sum a_n(x-x_1)^n$ 的敛散性信息,要求讨论 $\sum b_n(x-x_2)^n$ 的敛散性.

(1) $(x-x_1)^n$ 与 $(x-x_2)^n$ 的转化一般通过初等变形来完成,包括①"平移"收敛区间;②提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$ 等.

(2) $a_n$ 与 $b_n$ 的转化一般通过微积分变形来完成,包括①对级数逐项求导;②对级数逐项积分等.

(3)以下三种情况,级数的收敛半径不变,收敛域要具体问题具体分析.

①对级数提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$,或者作平移等,收敛半径不变.

②对级数逐项求导,收敛半径不变,收敛域可能缩小.

③对级数逐项积分,收敛半径不变,收敛域可能扩大.

# 五、常微分方程

1.一阶微分方程

| | 方程结构 | 解法/通解公式 |
|---|---|---|
| 可分离变量型<br>y 和 dy 放一起<br>x 与 dx 放一起 | $f(x)\mathrm{dx}=g(y)\mathrm{dy}$ | 两边积分$\int f(x)\mathrm{dx}=\int g(y)\mathrm{dy}$ |
| 齐次方程 | $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ | 令$u=\frac{y}{x}$则$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=u+x\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$，代入原式化为可分离变量 |
| 齐次方程<br>注意反过来 x<br>对 y 求导 | $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}=f\left(\frac{x}{y}\right)$ | 令$u=\frac{x}{y}$则$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}=u+y\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}}$，代入原式化为可分离变量 |
| 一阶线性齐次 | $y'+p(x)y=0$ | $y=ce^{-\int p(x)\mathrm{dx}}$ |
| 一阶线性非齐 | $y'+p(x)y=Q(x)$ | $y=e^{-\int p(x)\mathrm{dx}}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{dx}}\mathrm{dx}+c\right]$ |
| 一阶线性非齐<br>注意反过来 x<br>对 y 求导 | $\frac{dx}{dy}+p(y)x=Q(y)$ | $x=e^{-\int p(y)\mathrm{dy}}\left[\int Q(y)\cdot e^{\int p(y)\mathrm{dy}}\mathrm{dy}+c\right]$ |

2.二阶线性微分方程

（1）解的结构

齐通 $=c_1y_1(\text{齐特})+c_2y_2(\text{齐特})\left(y_1y_2\text{不成比例}\right)$　　　　**非齐通=齐通+非齐特**

齐特=非齐特−非齐特

| |
|---|
| $\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3$为二阶非齐次方程$y''+py'+qy=f\left(x\right)$三个线性无关的特解：<br>则齐次方程$y''+py'+qy=0$　　通解为：$Y=c_1(y_1-y_2)+c_2(y_1-y_3)$系数和为0<br>则齐次方程$y''+py'+qy=f\left(x\right)$　　通解为：$Y=c_1(y_1-y_2)+c_2(y_1-y_3)+y_1$系数和为1 |
| 解的叠加定理：$y_1^*$是$y''+py'+qy=f_1\left(x\right)$的解　　$y_2^*$是$y''+py'+qy=f_2\left(x\right)$的解<br>则：$\mathrm{A}y_1^*+\mathrm{B}y_2^*$是$y''+py'+qy=Af_1\left(x\right)+Bf_2\left(x\right)$的解 |

（2）二阶常系数线性齐次通解公式

方程结构：$y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$

| 特征根 | 通解公式 |
|---|---|
| $\Delta>0: r_1\neq r_2$ | $Y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ |
| $\Delta=0: r_1=r_2$ | $Y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$ |
| $\Delta<0: r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ | $Y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$注意共轭复根的求法 |

（3）二阶常系数线性非齐特解形式

| 方程结构 | 特解形式 | |
|---|---|---|
| $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_n(x)$ | $y^*=x^ke^{\lambda x}Q_n(x)$ | $k=0,\lambda$不是特征根 |
| | | $k=1,\lambda$是单根 |
| | | $k=2,\lambda$是重根 |
| $y''+py'+qy=$<br>$e^{\lambda x}\left[P_n(x)\cos\omega\ x+Q_m(x)\sin\omega\ x\right]$ | $y^*=x^ke^{\lambda x}\left[R_s^{(1)}(x)\cos\omega x+R_s^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$<br>$s=\max\{m,n\}$ | $k=0,\lambda\pm\omega i$不是特征根 |
| | | $k=1,\lambda\pm\omega i$是特征根 |

## 六、向量与空间解析几何（注意向量要加箭头）

1.若 $A=(x_1,y_1,z_1),B=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

2.若 $\vec{a}=(x,y,z)$，则与其同方向的单位向量 $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\frac{x}{|\vec{a}|},\frac{y}{|\vec{a}|},\frac{z}{|\vec{a}|})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，

与其平行（共线）的单位向量 $\vec{e}=\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|};\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|};\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}$

3. $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

| 数量积（参与运算的是向量结果是数）点乘 | 向量积（参与运算的是向量结果是向量）叉乘 |
|---|---|
| $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta=prj_{\vec{b}}^{\vec{a}}\cdot\|\vec{b}\|=prj_{\vec{a}}^{\vec{b}}\cdot\|\vec{a}\|$（投影也是数）<br>$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$（对应坐标相乘再相加） | $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$ 方向：右手定则<br>向量积的模长：$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$ |
| $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$ | $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ |
| $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（交换性质） | $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ |
| $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ | $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ |

- $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$；　　$prj_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$
- $\vec{c}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{c}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$
- 以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的三角形面积 $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$
- 叉乘几何意义：以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$
- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 中若有两个向量相同则结果为 0　　轮换性质：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$。

4.平面

（1）一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow$ 法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

（2）点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Rightarrow$ 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

（3）已知平面Ⅰ：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，平面Ⅱ：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

若两平面平行，则 $\vec{n_1}//\vec{n_2}\Rightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$，且平面间距离 $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$；

若两平面垂直，则 $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\Rightarrow\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

若两平面相交，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|$；若两平面重合，则 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

5.直线

（1）一般式方程 $\left.\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\Rightarrow\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)\\[2em] A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\Rightarrow\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)\end{cases}\right\}\Rightarrow$ 方向向量 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

（经常性疑问）一般式如何取点（赋特值例如假设 x=0 解得 y，z 或 y=1，解得 x，z 等）

（2）点向式方程：$\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}\Rightarrow$ 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且方向向量 $\vec{s}=(p,m,n)$

（3）参数式方程（用于设交点，令点向式方程等于 t）：设两直线交点为 $(x_0+pt,y_0+mt,z_0+nt)$

（4）直线 $L_1$: $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$，直线 $L_2$: $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ $\left(\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\right)$

若两直线平行，则 $\vec{s_1}//\vec{s_2}\Rightarrow\frac{p_1}{p_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$；

若两直线垂直，则 $\vec{s_1}\perp\vec{s_2}\Rightarrow\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0\Rightarrow p_1p_2+m_1m_2+n_1n_2=0$；

若两直线相交，则 $\cos\theta=\left|\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}\right|$；

若两直线异面，则 $(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq0$，其异面直线距离 $d=\frac{\left|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|}$。

6.直线与平面的关系：已知直线 $L$: $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，平面：$Ax+By+Cz+D=0$

若直线与平面平行：则 $\vec{n}\perp\vec{s}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{s}=0\Rightarrow pA+mB+nC=0$；

若直线与平面垂直，则 $\vec{n}//\vec{s}\Rightarrow\frac{p}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$；

若直线与平面相交，则 $\underline{\underline{\sin\theta}}=\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}\right|$；

若直线在平面上，则 $\vec{n}\perp\vec{s}$ 且（$x_0,y_0,z_0$)满足平面方程。

7.已知点：$M_1(x_1,y_1,z_1)$，直线 $L$: $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，平面：$Ax+By+Cz+D=0$

则点到直线的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$；则点到平面的距离 $d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

8.平面束方程：（通过直线的所有平面的集合）

直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$；其中$\lambda$为任意常数

# 高数考试注意点

1.注意题号，不要写错位置了；解题过程写清楚，不要超过每个题的答案位置

2.定义域(连续区间)写成区间，注意端点的开闭一定要写清楚

3.求微分，已知Δx 的值，就乘以Δx 的值，未知Δx 的值，不要忘记乘以 dx，该加的括号加上去，比如（2+x）dx

4.求不定积分不要忘了+c

5.定积分定义的题目，看清楚是表示成定积分还是要计算极限，若问极限等于多少，那还需将定积分算出来

6.注意极值点、驻点(x=x0)，极值(f(x0)的值)，拐点(x0,y0)的写法

7.类似于 sin1，ln2，e 的求导的问题，千万要记得这些是常数求导，结果为 0；求导的时候切记要看看是不是复合函数求导

8.幂级数求和，不要忘了算收敛域

9.幂级数展开不要忘了求范围，若求解过程中用了积分，求导，那么要重新判断端点敛散性

10.隐函数求导，不要忘了有 y 的地方一定有 y'；求 y''时记得代入 y';如果求某一点的导数值，结果一定是常数

11. 复杂函数求导用对数求导，不要直接求导，结果中要把 y 带进去；两个幂指函数或者幂指函数加其他函数的形式，不能两边直接取对数

12.参数方程求导，一阶导分子分母位置不要写反，二阶导不要忘了还要除以 dx/dt

13.分段函数求导，分段点用导数定义(左右导数)，其他地方直接求导都不带等号

14.渐近线的问题，算水平和斜渐近线时看看要不要分正负无穷

15.与 a 向量同方向的单位向量等于 a 向量除以模长;若是平行，则前面再添正负

16. 与 a.b 都垂直的单位向量有两个(添正负)

17.一阶线性非齐次方程的公式，c 是在括号里面的，注意哪里是有负号的;在计算过程中，指数多个负号，相当于取倒数

18.特解形式的题目，如果问一个特解是多少或者求二阶非齐次方程的通解，那么要把 a.b 这些算出来，如果问特解形式或者特解可设为什么，不用算

19.变限积分与微分方程的题目，最后要把任意常数算出来

20.收敛区间不用判断端点敛散性，它一定是个开区间；收敛域需要判断端点敛散性

21.利用奇偶性求定积分，不一定是奇函数+偶函数的形式，有可能是奇函数+非奇非偶函数的形式，不要随便写成 2 倍

22.求旋转体体积时，若要相减，合在一起是被积函数里面先平方再相减，不是先相减再平方，建议大家分成两个积分来写，不容易出错

23.分段函数求变限积分时，起点和终点都不能变，而且终点都是 x，不是具体的某个值

24.$\sqrt{f^2(x)}=|f(x)|$

25.平面方程和直线方程不要写错形式，注意点向式（直线方程）和点法式方程（平面方程）的写法

**不到最后一刻，谁都不能决定你的命运，好好把握这最后几天，只要有破釜沉舟的勇气，就会有意想不到的收获**